

Modelización de la dispersión de contaminantes en la Bahía de Santander, mediante el método de los elementos finitos^(*)

Por J. CARDONA

Escuela Superior de la Marina Civil.

A. SAMARTIN

Departamento de Análisis de las Estructuras.
Universidad de Cantabria

Existen diferentes métodos para el estudio de la calidad del agua en los estuarios, ríos, lagos, en zonas afectadas por los vertidos de sustancias contaminantes; que van desde los métodos experimentales tradicionales, hasta los más recientes modelos matemáticos. El modelo desarrollado permite resolver la ecuación de dispersión 2-D mediante técnicas en elementos finitos y por lo tanto obtener la evolución espacio-temporal de la concentración de constituyente. Se ha observado su exactitud en diferentes situaciones prácticas, y en particular se ha aplicado a la Bahía de Santander, analizándose el efecto de diferentes tipos de vertidos. El modelo es susceptible de utilizarse conjuntamente con otro modelo hidrodinámico capaz de simular la evolución del campo de velocidades.

1. INTRODUCCION

Durante los últimos años el aumento de la cantidad de sustancias contaminantes vertidas en los estuarios, ríos y lagos ha conducido al estudio de la calidad del agua en estas zonas.

Un método tradicional lo constituye el modelo físico a escala pero presenta dificultades de construcción y escalado, entre otras [3] [20] [25]. Una segunda posibilidad consiste en el estudio estadístico correlativo entre las distintas fuentes y las correspondientes zonas contaminadas. Un tal estudio estaría basado en un gran período de tiempo (varios años) para obtener una serie de muestras significativas estadísticamente [15]. Además una aproximación estadística basada en la toma de muestras no puede posiblemente predecir la concentración de contaminante debida a desembocaduras que puedan ser proyectadas en el futuro.

Otro método es el seguimiento directo de corrientes utilizando trazadores [15] [19] [23]. Esto puede proporcionar las trayectorias de las partículas descargadas. Una vez conocidas éstas se puede calcular la dispersión y decaimiento de

un contaminante a lo largo de la trayectoria. Un tal estudio es difícil de conducir y muy costoso, pues se debe seguir el trazador el tiempo preciso de forma que la concentración decaiga por debajo de un nivel razonable. Por otro lado las medidas están afectadas por las condiciones meteorológicas.

Actualmente gracias a la existencia de los ordenadores de elevada capacidad, se pueden emplear los modelos matemáticos. Una utilización conjunta e inteligente de los dos últimos métodos permitiría un análisis adecuado del fenómeno. En este estudio se muestran las posibilidades del método teórico, pudiendo sus resultados ser en un futuro, contrastados con la experiencia.

1.1 Modelos matemáticos

Un volumen natural de agua constituye un sistema físico, sometido a fenómenos naturales (radiación solar, viento, mareas, etc.) y a fenómenos causados por el hombre (vertidos, descargas, etc.). La respuesta del sistema a éstas «entradas» se puede reflejar en la distribución de la concentración de los distintos constituyentes. En este trabajo se supone que este proceso de distribución de contaminantes cumple la ecuación de transferencia de masa

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de abril de 1988.

que incluye procesos de transporte, difusión y reacción

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V(\bar{u} \cdot \theta) = V(\bar{D} \nabla^2 \theta) + s$$

u = Velocidad del fluido por convección.

θ = Concentración del contaminante.

D = Coeficiente de dispersión total.

s = Aportación de fuentes y sumideros.

Los modelos numéricos para el estudio de la dispersión de contaminantes en bahías y estuarios aparecen con la utilización del ordenador y adquieren un desarrollo importante particularmente con la aplicación del método de los elementos finitos (mef).

La técnica numérica más comúnmente utilizada durante muchos años para la solución de este tipo de modelo de la calidad del agua ha sido el método de las diferencias finitas [2] [3] [6] [17] [23] [28] [35] [37]. Frente a su sencillez este método presenta varios inconvenientes como la dispersión numérica y el tratamiento poco preciso de las condiciones de borde, entre otros [6] [27] [34].

1.2 Método de los elementos finitos

Este método presenta la ventaja, frente al anterior, de una mayor flexibilidad de la malla, lo cual permite trabajar con espaciado de malla variable [29]. Asimismo el tratamiento de las condiciones de borde queda bien definido [8] [18]. Y en general, puede tratar con mayor exactitud los frentes agudos, reduciendo por tanto el problema de la dispersión numérica [13].

Trabajos anteriores sobre aspectos teóricos se deben a J. E. Dailey (1973) [16] y Ch. Eghlig (1977) [17] quienes proponen distintos criterios de discretización para la obtención de la convergencia. Aportaciones a la integración temporal se deben a I. M. Smith (1973) [33], P. W. Mercer (1977) y Van Genuuchten (1977) [21] estableciendo aproximaciones con diferente orden de precisión.

Dentro de las aplicaciones prácticas, de particular interés son los estudios de la circulación en el Solent (Inglaterra) por C. A. Brebbia (1977) [9]. A. Cunge (1980) [15] ha obtenido la dispersión bacteriana en la Bahía de St. Brieuc

(Francia) a partir de las trayectorias calculadas por integración del campo de velocidades. Emplea un modelo en EF para la hidrodinámica de la bahía. R. A. Adey y C. Brebbia (1973) han modelizado la dispersión en el Este del Solent mediante un esquema Lagrangiano-Euleriano [1]. Más recientemente K. Kashiwama (1985) (Puerto de Shimizu, Japón) [24], ha tratado el problema de optimización de los datos de entrada, basándose en esquemas en EF.

El modelo desarrollado, resuelve directamente la ecuación de dispersión, previamente transformada a una formulación débil. La presencia de los términos convectivos supone un problema no-autoadjunto lo cual obliga a la utilización del método de Galerkin para la discretización espacial. Mientras que para la parte temporal se ha empleado un esquema de Crank Nicolson. A continuación se presentan las diferentes aplicaciones del modelo, comparando la solución analítica con la generada por el método. Asimismo se ha obtenido el efecto (evolución temporal) de distintas desembocaduras en la Bahía de Santander. La contaminación se ha medido en esta aplicación en términos de cantidad de bacterias (coliformes) por unidad de volumen y concentración de agentes químicos [7] vertidos en distintos puntos. Algunos datos experimentales se han tomado de las referencias [14] [22].

2. MODELO TEORICO DE LA DISPERSION

Se parte de una formulación clásica mediante la ecuación diferencial general 3-D para la difusión molecular. Se integra ésta en el tiempo y sobre la profundidad, lo cual es posible en problemas uniformemente mezclados en la dirección vertical, obteniendo así la ecuación promediada

$$\begin{aligned} \rho C h \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho C h v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\alpha h \theta + \rho h F_1 + \\ + \rho F_2 \delta_s + \sum_k Q_k \delta_k + \rho C \frac{\partial}{\partial x_i} (h D_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

$$1 \leq i \leq 2 \quad [1]$$

donde ρ representa la densidad del fluido, θ la concentración de la sustancia bajo estudio, h

la profundidad, v la velocidad del fluido, $C = 1$ en problemas de transferencia de masa, $C =$ calor específico en problemas de transporte de calor. En el segundo miembro el termino en F_1 incluye las fuentes volúmicas correspondientes a los distintos procesos bioquímicos. Los procesos de intercambio de sustancia en la superficie de separación aire-mar se incluyen en el término F_2 . El primer término caracteriza muchas de las reacciones de la polución del agua, en este caso se ha utilizado la cinética de primer orden con coeficiente de decaimiento α (seg^{-1}). Q_k representa la descarga nodal en la posición X_k .

Aparte de la condición inicial se debe especificar una sola condición sobre la frontera, la cual puede ser de dos tipos:

$$1) \quad \theta|_{\delta\Omega_1} = \bar{\theta} \quad [2]$$

$$2) \quad \bar{q} \bar{n}|_{\delta\Omega_2} = -\varrho C D_i \frac{\partial \theta}{\partial n_i}|_{\delta\Omega_2} = \bar{q}_n \quad [3]$$

donde $\bar{\theta}$ y \bar{q}_n son valores conocidos (datos) de la concentración (o temperatura y flujo normal al borde).

Fijado un instante, los parámetros de la ecuación diferencial son función de las variables espaciales. Para este instante, el problema se trata agrupando los términos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & -\varrho C \frac{\partial}{\partial x_i} (h D_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) + \varrho C h v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \alpha h \theta = \\ & = \{ F + \sum_k Q_k \delta_k - \varrho C h \frac{\partial \theta}{\partial t} \} \quad 1 \leq i \leq 2 \quad [4] \end{aligned}$$

2.1 Formulación débil

La aplicación del momento de los residuos ponderados conduce a la siguiente formulación débil del problema de la dispersión:

Dado el conjunto $W = \{W_2^1(\Omega), w | \delta\Omega_1 = \bar{\theta}\}$ y el espacio lineal $V = \{\Theta \in W_2^1(\Omega), \Theta|_{\delta\Omega_1} = 0\}$ donde $W_2^1(\Omega)$ es el espacio de las funciones de $L_2(\Omega)$ cuyas derivadas de orden ≤ 1 son de cuadrado integrable; se trata de obtener la función $u = w + \Theta$ con $w \in W$ arbitraria y fija y $\Theta \in V$ t.q.

$$((\theta, \theta')) = ((F + \sum_k Q_k \delta_k - \varrho C h \frac{\partial \theta}{\partial t}), \theta') -$$

$$((w, \theta')) + \int_{\Omega} \delta\Omega_2 h \theta' \bar{q}_n ds \quad [5]$$

$$\forall \theta' \in V$$

donde $(.,.)$ indica producto escalar en $L_2(\Omega)$ y $((.,.))$ se define por

$$\begin{aligned} ((\theta, \theta')) &= \int_{\Omega} \varrho C h D_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \varrho C h v_i \\ & \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \theta' d\Omega + \int_{\Omega} \varrho \alpha h \theta \theta' d\Omega \end{aligned}$$

Con el fin de construir una solución aproximada de la solución u de (5), se ha empleado el método de Galerkin; el cual consiste en construir dicha aproximación dentro de un subespacio lineal de dimensión finita m , del espacio de las funciones admisibles $u_m \in U_m \subset W_2^1$, generado por las funciones $(\phi_1, \dots, \phi_n, \dots, \phi_m)$.

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_{i=1}^m u_i(t) \phi_i(x) = w_m + \theta_n = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i + \\ & + \sum_{i=1}^n \theta_i \phi_i \quad [7] \end{aligned}$$

con $w_m \in W_m \subset W$, $\theta_n \in V_n \subset V$, θ_i incógnitas y w_i constantes conocidas.

Se sustituye (7) en (5) y dada la arbitrariedad de las funciones prueba θ' , se eligen $\theta' = \Theta_j$, $1 \leq j \leq n$ lo cual conduce al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\underline{M} \underline{\theta}' + (\underline{K} + \underline{A} + \underline{B}) \underline{\theta} = \underline{P} \quad [8]$$

donde las matrices se definen por

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega} \varrho h \phi_i \phi_j d\Omega \\ K_{ij} &= \int_{\Omega} \varrho C h D_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} d\Omega \\ A_{ij} &= \int_{\Omega} \varrho C h v_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \phi_j d\Omega \\ B_{ij} &= \int_{\Omega} \varrho \alpha h \phi_i \phi_j d\Omega \\ P_j &= \int_{\Omega} F \phi_j d\Omega - \sum_k Q_k \phi_j \delta_k + \int_{\delta\Omega_2} h \bar{q}_n \phi_j dS - \\ & - \sum_{i=1}^m ((\phi_i, \phi_j)) w_i \end{aligned}$$

$$\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^t, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

2.2 Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos proporciona una técnica sistemática y muy general para la construcción de las funciones base globales ϕ_i . Se sustituye el dominio Ω por el dominio discretizado formado por NE elementos y m nudos. Parte de los gdl son libres (1, 2, ..., n) y el resto son gdl impuestos (n + 1, ..., m). Como funciones base globales ϕ_i se eligen polinomios 2D verificando: (1) Continuidad interelementos. (2) La restricción a nivel de cada elemento satisface las relaciones $\phi_i(X_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq \text{NGLE}$ (número de gdl por elemento). (3) $\phi_i \neq 0$ solamente sobre la unión de los elementos que contienen el nudo i. Las funciones base de V_n satisfacen las condiciones impuestas homogéneas:

$$N_i(\bar{x}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq \text{NGLE} \quad [10]$$

la función w_m se define por

$$w_m = \sum_{i=1}^m w_i \phi_i, \quad w_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq n \text{ (g.d.l. libres)} \\ \bar{\theta} & n+1 < i \leq m \text{ (g.d.l. imp.)} \end{cases} \quad [11]$$

Las matrices definidas por las expresiones (9) tienen las siguientes propiedades: (1) Son sumables y se calculan como la suma booleana de cada elemento. (2) Son poco densas, con muchos elementos nulos debido a la forma de las funciones ϕ_i elegidas. (3) Estructura bandeda si la numeración de los gdl de la malla es adecuada (4). Las matrices \underline{M} , \underline{K} , \underline{B} son simétricas, sin embargo A no lo es, esto puede dificultar algo el cálculo dado que se requiere una mayor capacidad para almacenar toda la banda.

La restricción de las funciones base globales sobre cada elemento Ω_e (funciones de forma) $N_i(x)$ se determinan únicamente mediante las relaciones $N_i(x_j) = \delta_{ij}$. En general para elementos no lagrangianos (Hermiticos, Hiper elementos) se deben utilizar otras relaciones [26] [10] [11] [12] [31].

El método de los elementos finitos permite un planteamiento a nivel local. La restricción de la solución aproximada sobre un elemento Ω_e es

$$\theta_n^e(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^{\text{NGLE}} \theta_i(t) N_i^e(\bar{x}) \quad [12]$$

Y las expresiones de las matrices elementales (9) tienen la misma forma sin más que reemplazar ϕ_i por N_i .

2.3 Integración temporal

La solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\underline{M}\underline{\theta} + \underline{N}\underline{\theta} = \underline{P} \quad ; \quad \underline{N} = \underline{A} + \underline{K} + \underline{B} \quad [13]$$

con la condición inicial $\underline{\theta}(0) = \underline{\theta}_0$, es

$$\underline{\theta}(t) = e^{-\underline{M}^{-1}\underline{N}t} \underline{N}^{-1}(\underline{\theta}_0 - \underline{N}^{-1}\underline{P}) + \underline{N}^{-1}\underline{P} \quad [14]$$

y la fórmula recurrente

$$\underline{\theta}(t + \Delta t) = e^{-\Delta t \underline{M}^{-1}\underline{N}} \underline{N}^{-1}(\underline{\theta}(t) - \underline{N}^{-1}\underline{P}) + \underline{N}^{-1}\underline{P} \quad [15]$$

La presencia del factor experimental supone un gran esfuerzo de cálculo, por lo que es preciso aproximarlos mediante funciones racionales; en este caso se ha aplicado la aproximación de Crank-Nicolson [32], que conduce a la fórmula iterativa

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K} + \underline{A} + \underline{B} \underline{\theta}(t + \Delta t) = \\ & = \left(\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K} - \underline{A} - \underline{B} \right) \underline{\theta}(t) + 2\underline{p} \end{aligned} \quad [16]$$

Introducidas las condiciones impuestas, se obtiene el sistema

$$\underline{M}^* \underline{\theta} = \underline{F}^* \quad [17]$$

cuya solución se determina mediante un método directo (Gauss) [5] [36]

$$\underline{\theta} = \underline{M}^{*-1} \underline{F}^* \quad [18]$$

2.4 Elementos isoparamétricos

Una fase importante del análisis por EF es el cálculo de las matrices elementales. Muchas veces es necesario, y en general más preciso representar un dominio con bordes curvados mediante elementos con lados curvados (fig. 1(a)). La idea fundamental consiste en llevar a cabo los cálculos sobre un elemento de referencia en el cual éstos resulten más efectivos. En este caso se ha utilizado el elemento triangular

(fig. 1(b)) con la utilización de coordenadas baricéntricas [30].

La transformación utilizada es la transformación isoparamétrica

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{NNE} x_i N_i(L_1, L_2, L_3) \\ y &= \sum_{i=1}^{NNE} y_i N_i(L_1, L_2, L_3) \end{aligned} \quad [19]$$

donde x_i, y_i son las coordenadas nodales y NNE , el número de nudos del elemento; N_i son las funciones utilizadas para aproximar la variable dependiente. Las expresiones de las matrices elementales sobre el elemento $\hat{\Omega}$ toman la forma

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} C h N_i N_j |J| d\hat{\Omega} \\ K_{ij}^e &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} C h \left\{ D_x \frac{\partial N_i}{\partial x_i} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} + D_y \frac{\partial N_i}{\partial x_i} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} |J| d\hat{\Omega} \\ A_{ij}^e &= \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} C h \left\{ u(L_1, L_2, L_3) \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + \right. \\ &\quad \left. + v(L_1, L_2, L_3) \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \right\} |J| d\hat{\Omega} \end{aligned}$$

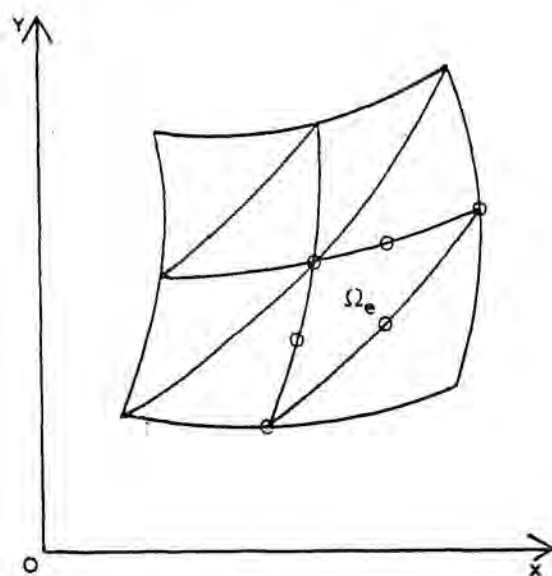
$$B_{ij}^e = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \alpha h N_i N_j |J| d\hat{\Omega}$$

$$\begin{aligned} P_k^e &= \int_{\hat{\Omega}} F N_k |J| d\hat{\Omega} - \sum_l Q_l N_k \delta_l + \\ &\quad + \int_0^1 h \bar{q}_n \times N_i |L_i|_0 |j(L_k)| dL_k \\ |j(L_k)| &= \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial L_k} \Big|_{L_i=0} - \frac{\partial x}{\partial L_i} \Big|_{L_i=0} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial y}{\partial L_k} \Big|_{L_i=0} - \frac{\partial y}{\partial L_i} \Big|_{L_i=0} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad [20]$$

donde las componentes de la velocidad y la batimetría se interpolan por

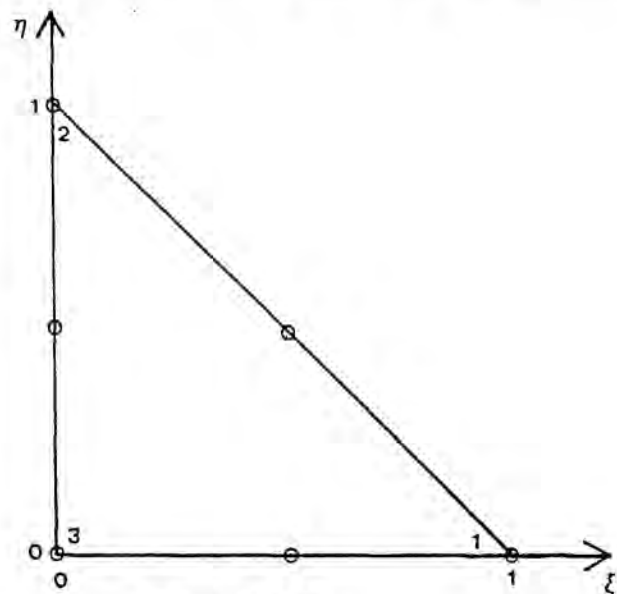
$$\begin{aligned} u(L_1, L_2, L_3) &= \sum_{i=1}^{NNE} u_i N_i \\ v(L_1, L_2, L_3) &= \sum_{i=1}^{NNE} v_i N_i \\ h(L_1, L_2, L_3) &= \sum_{i=1}^{NNE} h_i N_i \end{aligned} \quad [21]$$

La elección del tipo de elemento depende en general de la forma débil y de la magnitud del problema (tiempo de cálculo, memoria, precisión, etc.) En la fig. 2 se indican diferentes tipos de elementos utilizables por el modelo.



Plano XY

(a) Dominio Ω

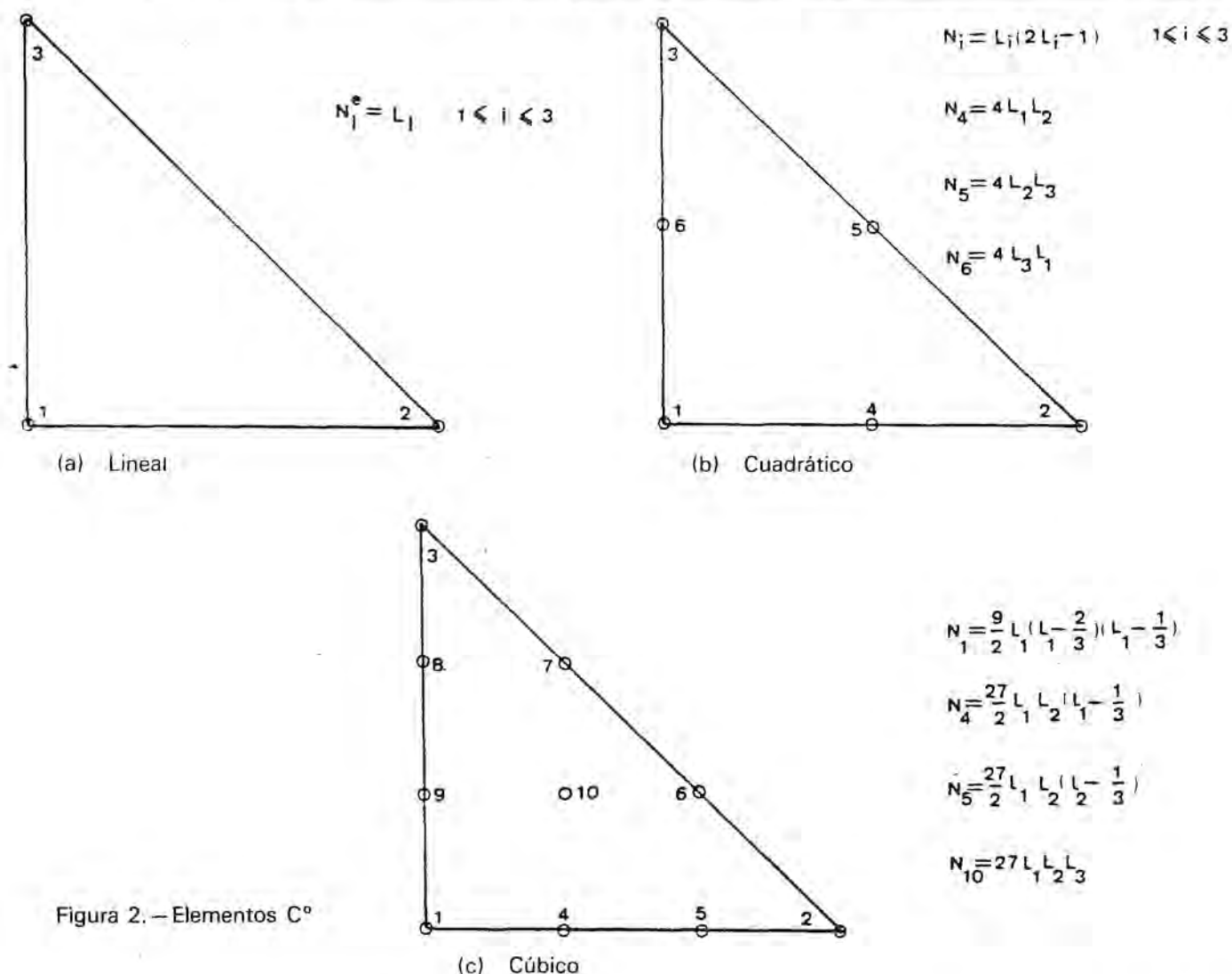


Plano $L_1 L_2 L_3$

$$L_1 = \xi : L_2 = \eta : L_3 = 1 - L_1 - L_2$$

(b) Elemento referencia $\hat{\Omega}$

Figura 1.—Elementos isoparamétricos


 Figura 2. — Elementos C^0

3. EXPERIMENTACION NUMERICA

Se analiza la exactitud del modelo en distintos casos de aplicación, comparándose la solución analítica, con la generada por el método. Finalmente se aplica a la Bahía de Santander.

3.1 Aplicación 1

Se ha obtenido la propagación de la onda de concentración para el canal de la fig. 3, supuesta conocida la concentración en un extremo con una velocidad del fluido uniforme en todo el dominio. Los datos se muestran en la Tabla 1.

Para la solución numérica se ha utilizado la malla de la fig. 5 formada por 14 elementos cuadráticos y 45 nudos.

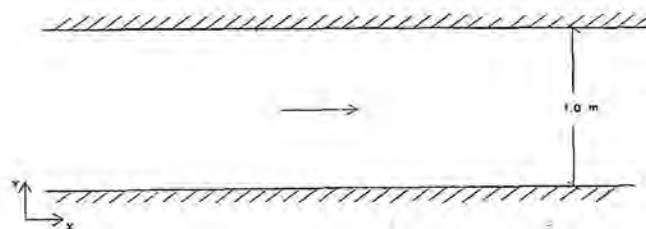


Figura 3. — Canal (Aplicación 1).

TABLA 1
DATOS APLICACION 1

Velocidad	Coef. de dispersión	Profundidad	Concentración
ms^{-1}	m^2s^{-1}	m	$\frac{q_1}{Q}$
U V	$D_x D_y h$		$\theta(x=0) \theta(t=0)$
0,05 0,00	0,01 0,00	1,00	1,00 0,00

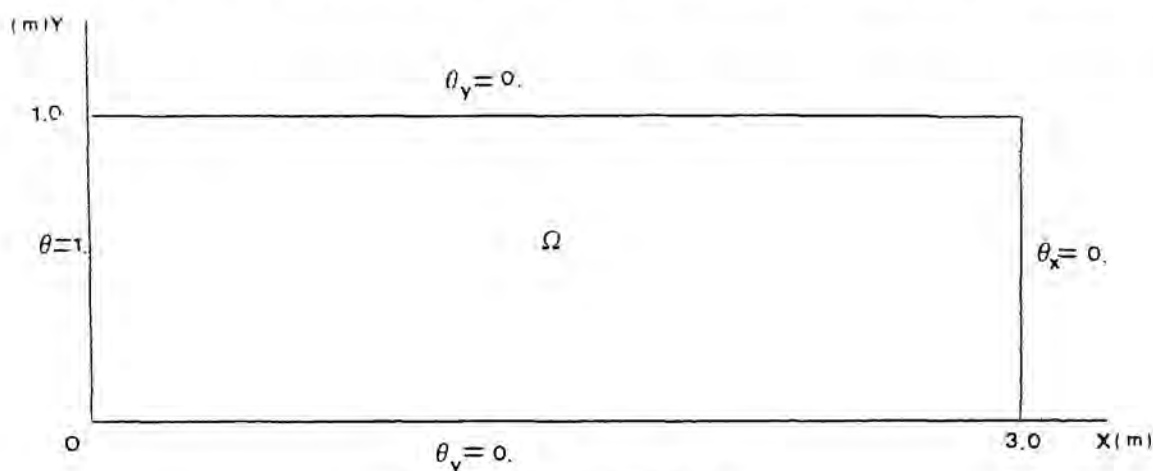


Figura 4. — Dominio de solución.

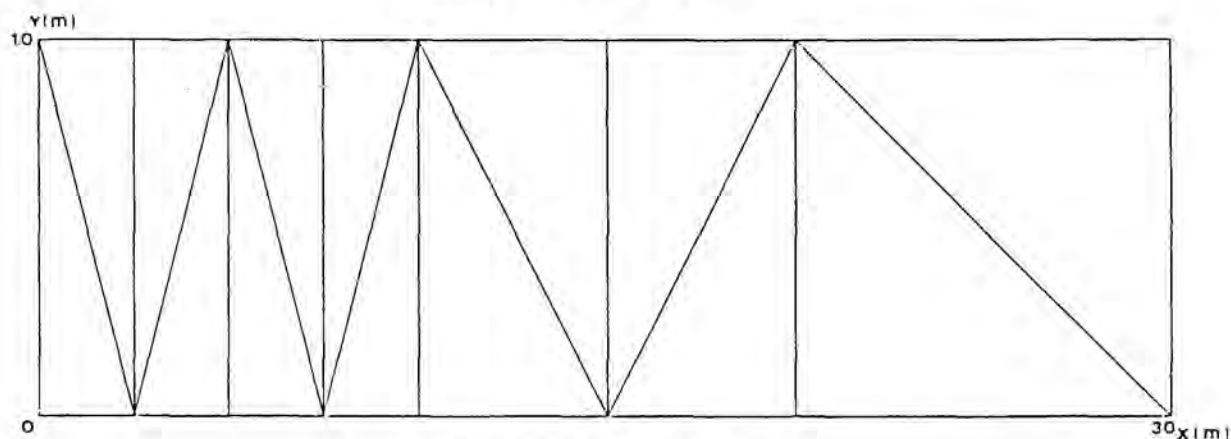


Figura 5. — Malla de E.F.

Se ha dotado de una mayor densidad de nudos en las proximidades de la entrada de contaminante, frente a las variaciones de concentración. La solución para el caso estacionario se indica en la Tabla 2.

TABLA 2
Concentración $\theta = c_1/c$

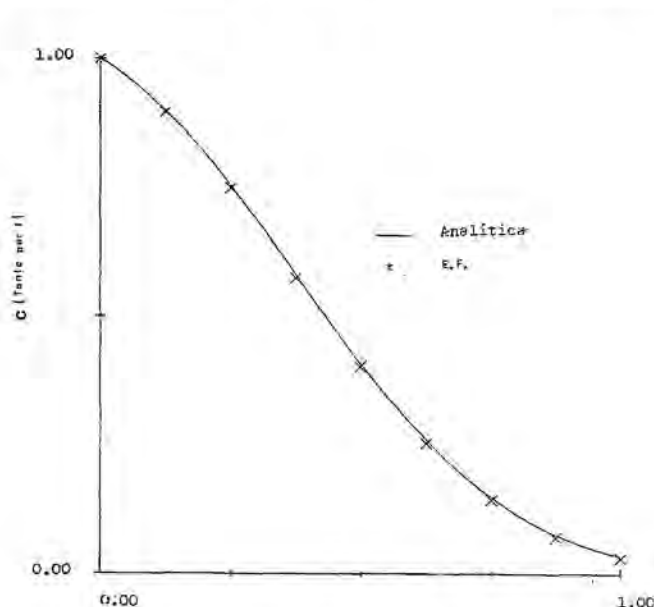
CASO ESTACIONARIO		
Posición X	Solución E. F.	Solución Analítica
0.000	1.0000	1.0000
0.125	1.0000	1.0000
0.250	1.0000	1.0000
0.375	1.0000	1.0000
0.500	1.0000	1.0000
0.625	1.0000	1.0000
0.750	1.0000	1.0000
0.875	1.0000	1.0000
1.000	1.0000	1.0000

Para la evolución temporal se han estudiado diversas situaciones con diferentes intervalos Δt . Los resultados para $\Delta t = 1/4$ seg. y $\Delta t = 1$ seg. se muestran en las figuras 6 y 7. La solución numérica aparece subestimada con un mayor grado de aproximación para valores pequeños de Δt y también en las posiciones correspondientes a una menor densidad de nudos (elementos de mayores dimensiones). La solución analítica corresponde a la función

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2} \text{fcer} \left\{ \frac{x - ut}{2(D_x t)^{1/2}} \right\} + \frac{1}{2} e^{ux/D_x} \text{fcer} \left\{ \frac{x + ut}{2(D_x t)^{1/2}} \right\} \quad [22]$$

3.2 Aplicación 2

Se ha modelizado la propagación del frente de concentración en el canal de la fig. 8 debi-

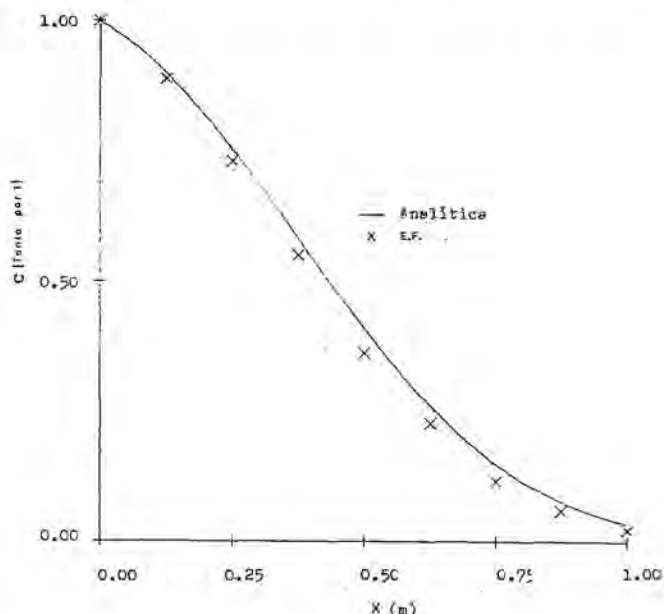


$$D_x = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad D_y = 0.00 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$u = 0.05 \text{ m s}^{-1} \quad v = 0.00 \text{ m s}^{-1}$$

$$t = 6.00 \text{ s}$$

Figura 6. — Perfil concentración para $t = 6$ seg.
($\Delta t = 1/4$ seg.)



$$D_x = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad D_y = 0.00 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$u = 0.05 \text{ m s}^{-1} \quad v = 0.00 \text{ m s}^{-1}$$

$$t = 6.00 \text{ s}$$

$$Dt = 1.00 \text{ s}$$

Figura 7. — Perfil concentración para $t = 6$ seg.
($\Delta t = 1$ seg.)

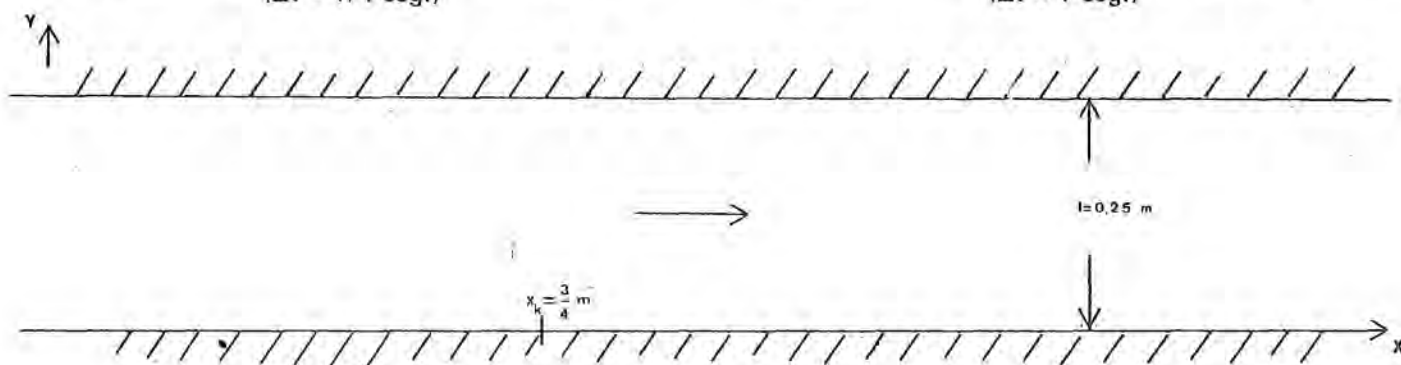


Figura 8. — Canal (Aplicación 2)

do a la inyección a lo largo de la recta $x = x_k$, de una sustancia con diferentes coeficientes de decaimiento α . Los datos utilizados se pueden ver en la Tabla 3.

Para la solución numérica se ha discretizado el dominio $\Omega = [0, 2] \times [0, 1/4]$ con los bordes suficientemente alejados de la descarga. La malla de e.f. (fig. 9) consta de 28 elementos y 87 nudos. Como se observa, se ha reducido la dimensión longitudinal en las proximidades de la descarga.

El perfil de la concentración correspondiente

TABLA 3
DATOS APLICACION 2

Velocidad	Coef. de dispersión	Profundidad	Dominio	Descarga nodal	Posición
m s^{-1}	$\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$	m	m	s^{-1}	m
$U \quad V$	$D_x \quad D_y$	H	Ω	$Q_{37} \quad Q_{38} \quad Q_{39}$	x_k
0,1 0,0	0,01 0,00	1,0	$(0,2) \times [0, 1/4]$	1/6 2/3 1/6	3/4

a los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 0,01 \text{ seg}^{-1}$ para la situación estacionaria se puede ver en las figuras 10 y 11. En las tablas 4 y 5 se muestra este

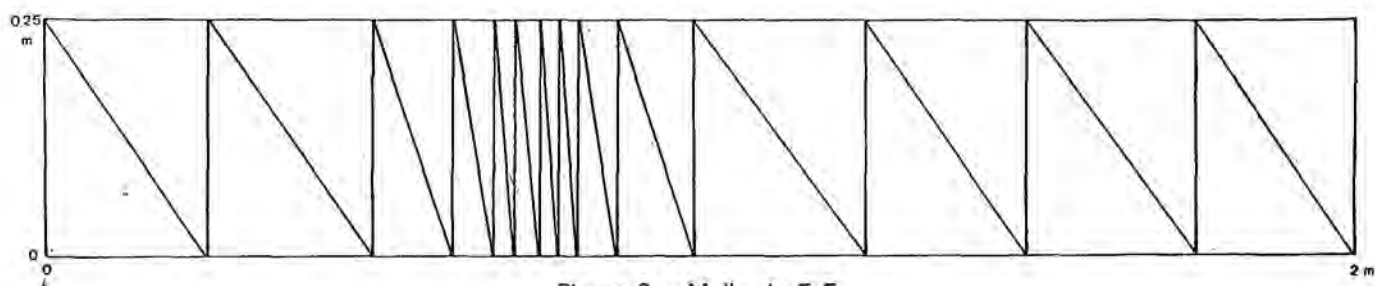


Figura 9. — Malla de E F

TABLA 4
Solución estacionaria ($\theta = q_1/q$).
Descarga en $x = 0,75$ m

CASO ESTACIONARIO COEF. DECAIMIENTO = 0		
Posición X	Solución E. F.	Solución Exacta
0.0000	0.0000	0.0221
0.1250	0.0895	0.0772
0.2500	0.3688	0.2695
0.3750	0.9370	0.9407
0.5000	3.3332	3.2834
0.5625	6.1240	6.1342
0.6250	11.4495	11.4602
0.6563	15.6439	15.6642
0.6875	21.3913	21.4105
0.7032	25.0216	25.0377
0.7186	29.2680	29.2792
0.7344	34.2142	34.2225
0.7500	39.9970	40.0000
0.7813	39.9970	40.0000
0.8125	39.9970	40.0000
0.8750	39.9970	40.0000
1.0000	39.9970	40.0000
1.2500	39.9970	40.0000
1.7500	39.9970	40.0000
2.0000	39.9970	40.0000

TABLA 5
Solución estacionaria ($\theta = q_1/q$).
Descarga en $x = 0,75$ m

CASO ESTACIONARIO COEF. DECAIMIENTO = 0.01		
Posición X	Solución E. F.	Solución Exacta
0.0000	1.0000	0.0201
0.1250	0.0839	0.0712
0.2500	0.3475	0.2515
0.3750	0.8805	0.8888
0.5000	3.1781	3.1409
0.5625	5.8745	5.9044
0.6250	11.0581	11.0993
0.6563	15.1592	15.2180
0.6875	20.7975	20.8651
0.7032	24.3673	24.4377
0.7188	28.5500	28.6220
0.7344	33.4290	33.5058
0.7500	39.1428	39.2230
0.7657	39.0821	39.1625
0.7813	39.0216	39.1019
0.7970	38.9613	39.0415
0.8125	38.9012	38.9813
0.8438	38.7809	38.8609
0.8750	36.6611	38.7408
0.9375	38.4225	38.5018
1.0000	38.1855	38.2642
1.1250	37.7159	37.7936
1.2500	37.2525	37.3287
1.3750	36.7956	36.8695
1.5000	36.3467	36.4160
1.6250	35.9072	35.9681
1.7500	35.4918	35.5287
1.8750	35.1098	35.0887
2.0000	34.9214	34.6571

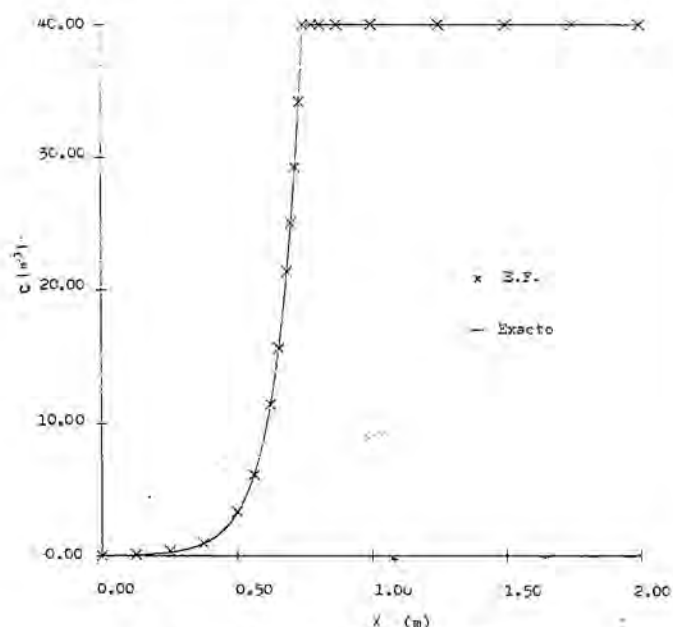
resultado en forma numérica. La solución exacta se ha obtenido a partir de la formulación clásica (ecuación diferencial). Este resultado permite observar la exactitud del método, obteniéndose un error siempre inferior al 4 por 100 en puntos próximos al origen (elementos de mayores dimensiones) debido, entre otros factores a la limitación del dominio.

Para el caso transitorio, se ha obtenido la evolución de la concentración con el tiempo para distintos valores de Δt y α suponiendo una distribución inicial nula. La Tabla 6 permite observar este resultado, donde la comparación con la solución analítica estacionaria, para un instante suficientemente grande, muestra el buen comportamiento del modelo.

3.3 Aplicación a la Bahía de Santander

Se ha aplicado el modelo al estudio de la dispersión de la Bahía de Santander, a partir de diferentes tipos de vertidos.

La Bahía de Santander está limitada, al Norte por la línea que une Cabo Menor con la punta Norte de la isla Santa Marina y al Sur por la Ría

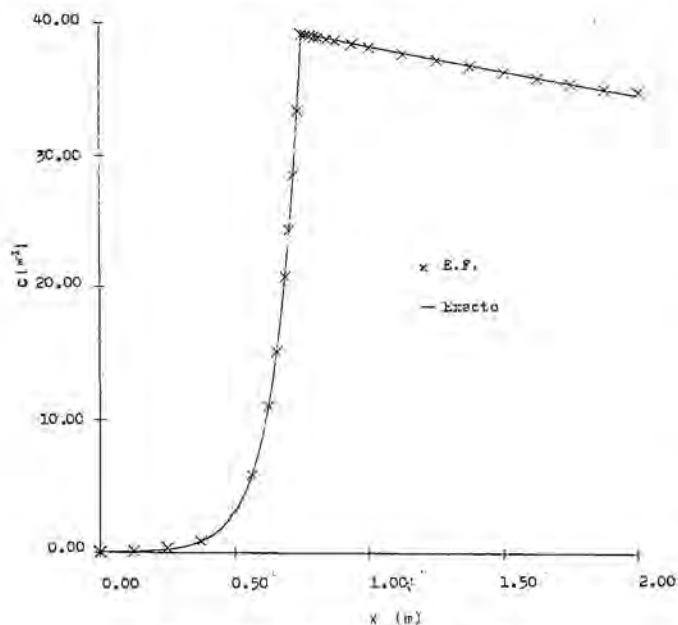


$$D_x = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad D_y = 0.00 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$u = 0.01 \text{ m s}^{-1} \quad v = 0.00 \text{ m s}^{-1}$$

$$t = 0.00 \quad Dt. = 0.00$$

Figura 10. — Solución estacionaria $\alpha = 0 \text{ s}^{-1}$.
Descarga en $x = 0.75 \text{ m}$.



$$D_x = 0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad D_y = 0.00 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$u = 0.10 \text{ m s}^{-1} \quad v = 0.00 \text{ m s}^{-1}$$

$$t = 0.00 \quad Dt. = 0.00$$

Figura 11. — Solución estacionaria $\alpha = 0.01 \text{ s}^{-1}$.

TABLA 6
Solución transitoria para $t = 6 \text{ seg. } \Delta t = 1.0 \text{ seg.}$

CASO TRANSITORIO		COEF. DECAIMIENTO = 0.01
Posición X	Solución E. F.	Solución Exacta
0.0000	0.0000	0.0201
0.1250	0.0839	0.0712
0.2500	0.3475	0.2515
0.3750	0.8805	0.8888
0.5000	3.1781	3.1409
0.5625	5.8745	5.9044
0.6250	11.0581	11.0993
0.6563	15.1591	15.2180
0.6875	20.7973	20.8651
0.7032	24.3676	24.4377
0.7188	28.5494	28.6220
0.7344	33.4285	33.5058
0.7500	39.1442	39.2230
0.7657	39.0816	39.1625
0.7813	39.0213	39.1019
0.7970	38.9618	39.0415
0.8125	38.9010	38.9813
0.8438	38.7809	38.8609
0.8750	36.6611	38.7408
0.9375	38.4225	38.5018
1.0000	38.1855	38.2642
1.1250	37.7936	37.7936
1.2500	37.3287	37.3287
1.3750	36.8695	36.8695
1.5000	36.4160	36.4160
1.6250	35.9681	35.9681
1.7500	35.5287	35.5287
1.8750	35.0887	35.0887
2.0000	34.6571	34.6571

de Astillero (fig. 12). La discretización se ha llevado a cabo con las mallas indicadas en las figuras 13 y 14. La primera permite estudiar una mayor extensión y consta de 799 nudos y 349 elementos con un ancho de banda de 211. La segunda malla, debido a su ancho de banda reducido (54) tiene la ventaja de una mayor eficacia computacional. También, en las mismas figuras se pueden ver las velocidades en algunos nudos, en condiciones de marea saliente, obtenidas a partir de datos experimentales [14]. El estudio se ha llevado a cabo sobre una profundidad de $h = 3 \text{ m}$ con elementos cuadráticos isoparamétricos. Los casos que se presentan a continuación corresponden a la malla de la figura 14.

Se ha obtenido el efecto de una entrada de sustancia conservativa $\alpha = 0.0 \text{ seg}^{-1}$ con concentración θ igual a la unidad, por la ría de Astillero, y a lo largo de un ciclo de marea. Los

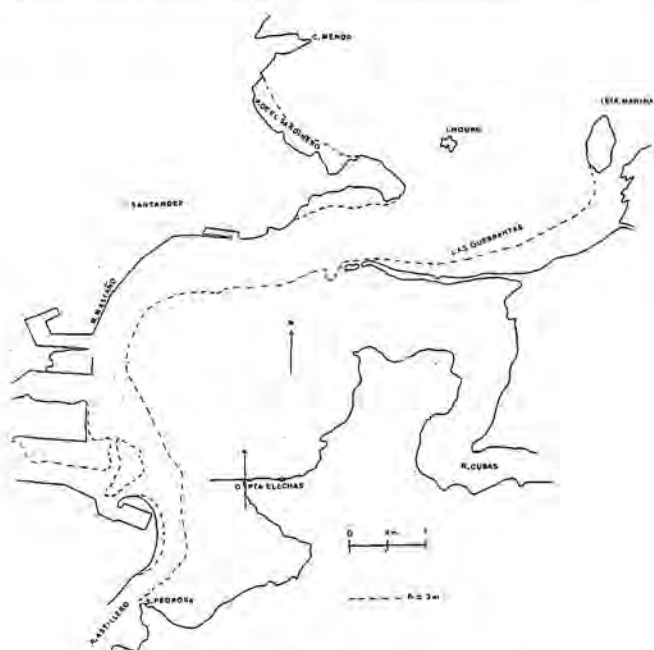


Figura 12. — Bahía de Santander.

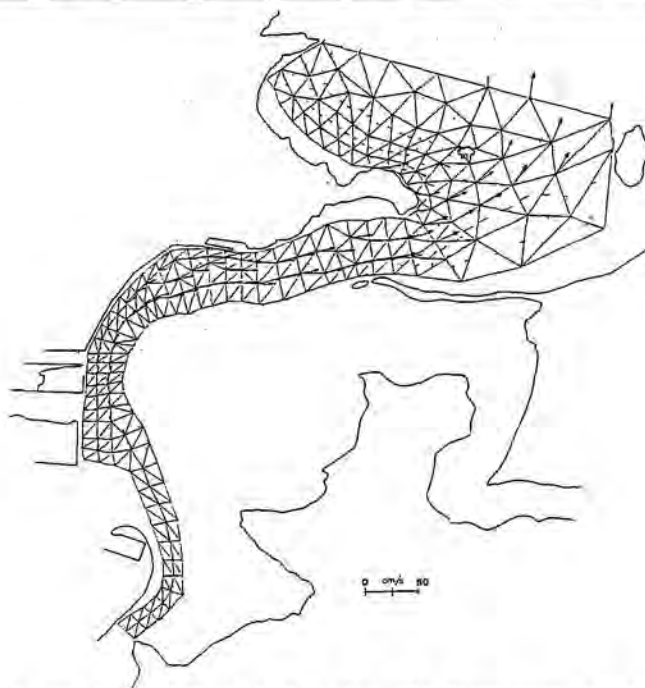


Figura 14. — Malla 2. 857 Nudos, 369 Elementos. Ancho de banda = 54.

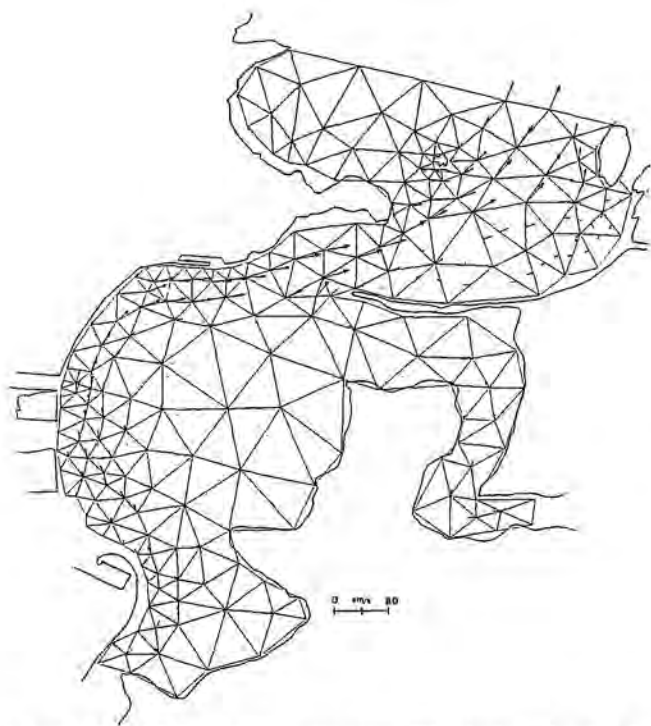


Figura 13. — Malla 1. 349 Elementos, 799 Nudos. Ancho de banda = 211.

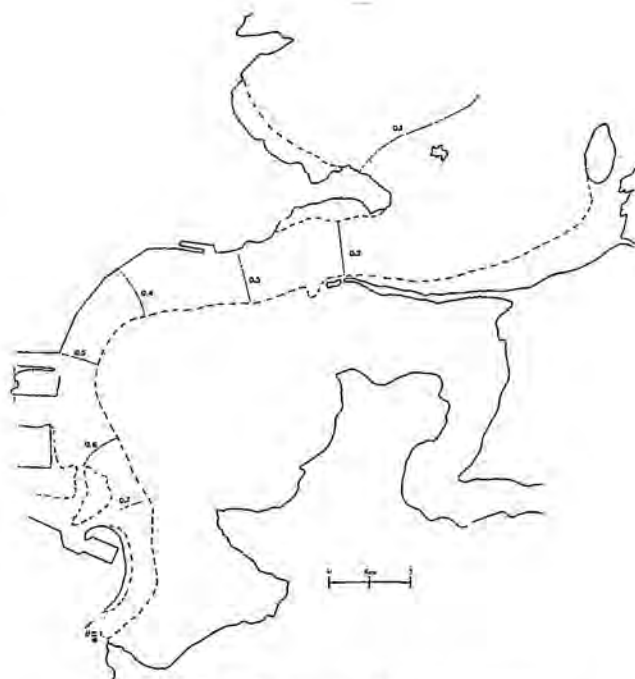


Figura 15. — Concentración ($\theta = \rho_1/\rho$), $t = 6$ h, $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$. Marea saliente.

coeficientes de dispersión utilizados son $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ y el intervalo de discretización temporal $\Delta t = 200$ seg. Las curvas dibujadas por el ordenador correspondientes a diferentes niveles de concentración ($\theta = \rho_1/\rho$

en tanto por uno), se muestran solamente para los instantes $t = 6$ h y $t = 12$ h en las figuras 15 y 16. Se observa una distribución más uniforme en la desembocadura de la bahía, con valores de la concentración próximos a 0,2.

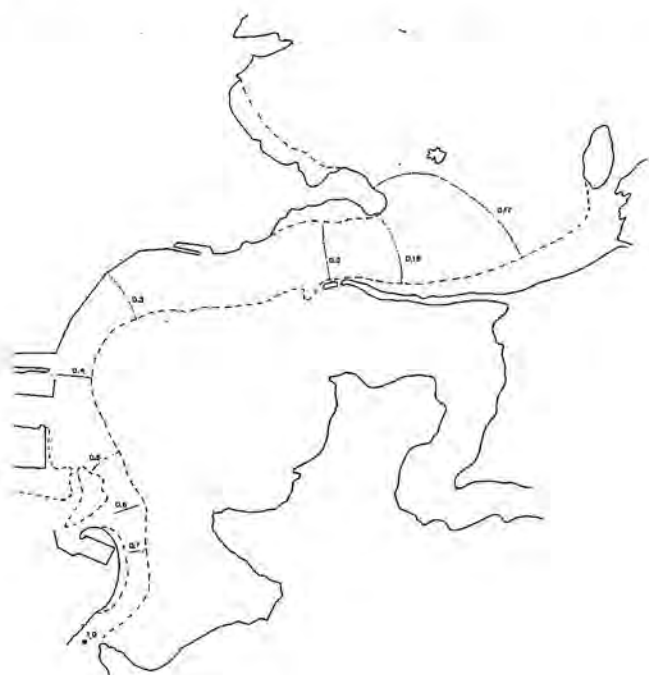


Figura 16.—Concentración ($\theta = \rho_1/\rho$), $t = 12$ h, $\alpha = 0$. $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. $\Delta t = 200$ s. Marea entrante.

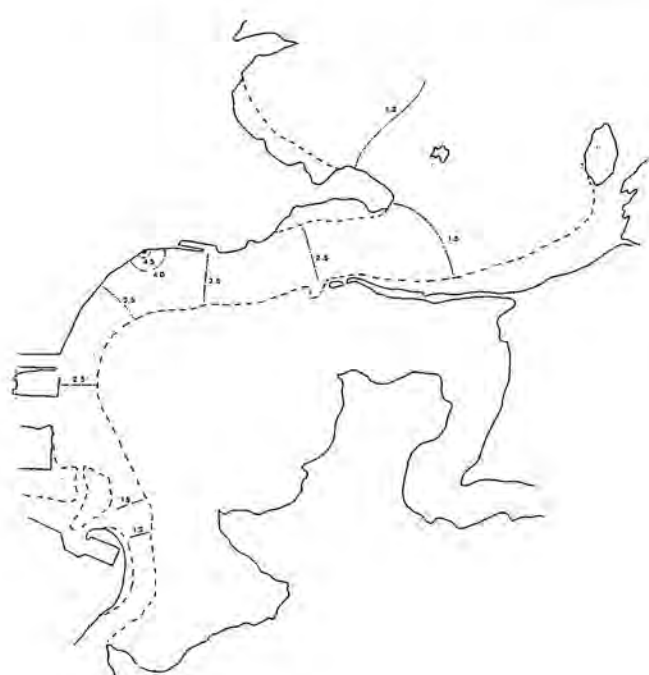


Figura 18.—Concentración de bacterias ($\theta \times 10^3 \text{ bact}/100 \text{ ml}$), $\alpha = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $t = 12$ h. $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Marea entrante.

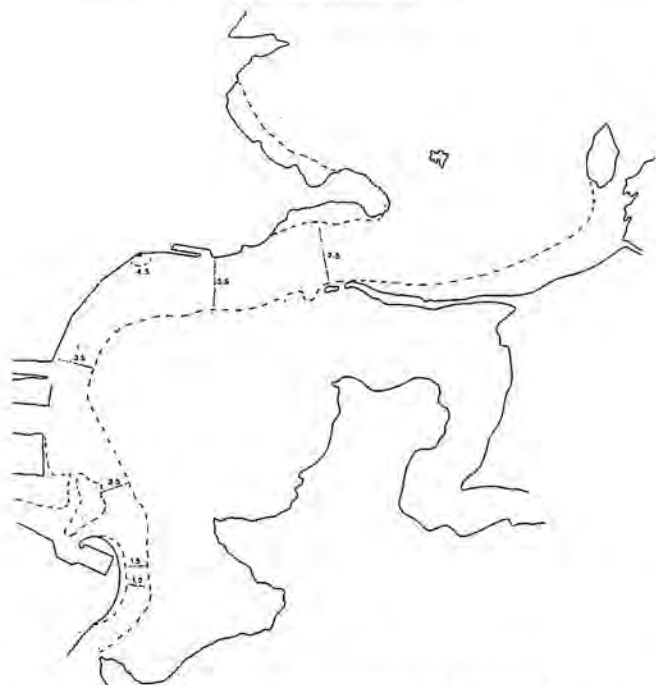


Figura 17.—Concentración de bacterias ($\theta \times 10^3 \text{ bact}/100 \text{ ml}$), $\alpha = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Marea saliente, $t = 6$ h.

En las figuras 17 y 18 se observa la salida gráfica que corresponde a la descarga puntual de un efluente en la posición indicada (muelle) de-

finida por una densidad $\theta = 5 \times 10^3$ bacterias/100 ml. El coeficiente de decaimiento utilizado es $\alpha = 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ con objeto de incluir la muerte de bacterias. Los coeficientes de dispersión y el intervalo temporal son respectivamente $D_x = D_y = 10^3 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ y $\Delta t = 200$ seg. Este resultado se muestra para los instantes $t = 6$ h y $t = 12$ h. Igualmente se comprueba una mayor uniformidad y elevación de la concentración ($\theta = 2,5 \cdot 10^3$) en la desembocadura, una vez completado el ciclo de mareas.

Se han analizado otras situaciones con diferentes coeficientes de dispersión, —en particular el caso anisótropo—, y con diferente discretización temporal Δt . En general para valores de D_x y D_y inferiores a $5 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ se obtienen valores no significativos en algunos nudos debido al parámetro de la malla utilizando. Cabe esperar con mallas aún más refinadas, mejores resultados en éstos casos.

Finalmente conviene indicar que el nivel aceptable de concentración, para un determinado tipo de contaminante, es un tema de mucha discusión. Sin embargo la concentración puede ser un índice de la cantidad de dilución y purifica-

ción que tiene lugar entre la posición de la descarga y un punto determinado.

4. CONCLUSIONES

El modelo de la dispersión desarrollado, es particularmente útil en aquellos problemas en que no es posible la obtención de la solución analítica (datos o dominios irregulares). La aplicación en dominios con elevado ancho de banda y gran número de g.d.l. requiere la utilización de ordenadores de elevada capacidad.

La solución depende grandemente del tipo de elemento a utilizar. Se ha comprobado la exactitud del mismo en distintos casos mediante elementos cuadráticos isoparamétricos. Es posible su aplicación con elementos lineales, si bien se precisa una malla más refinada. Asimismo cabe esperar una mayor precisión con elementos de mayor orden, pero con un mayor esfuerzo computacional. Es posible incluir en el modelo, con ligeras modificaciones elementos infinitos Lagrangianos.

Como campo de velocidades aproximado, se ha tomado el que resulta de datos experimentales existentes. Así las situaciones creadas por el movimiento de marea, han sido tenidas en cuenta en forma aproximada en el programa. La elaboración y aplicación de un modelo de la hidrodinámica de estuarios, permitirá deducir en cada instante el campo real de velocidades. Estas alimentarían como datos de entrada al modelo de la dispersión desarrollado. De esta forma, situaciones transitorias pueden ser tratadas a costa de un esfuerzo de cálculo importante.

Se sugiere la realización de una campaña de datos en la Bahía de Santander de cara al modelo, con objeto de su aplicación y calibración con datos actuales.

REFERENCIAS

1. ADEY, R. A.; BREBBIA, C. A.: «Finite element for effluent dispersion». Univ. of Southampton. 1977.
2. APELT, C. J.; GOUT, J.J.; SZEWCYK, A. A.: «Numerical modelling of pollutant transport and dispersion in bays and estuaries». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluids Dynamics. 1973.
3. BAILEY, T. E.; MC.CULLOUGH, C. A.; GUNNERSON, C. G.: «Mixing and dispersion studies in San Francisco Bay». Journal of the Sanitary Engineering Division «(ASCE)». Vol 92, N.º SA5.
4. BAKER, A. J.: «A highly stable explicit integration technique for computational continuous mechanics». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluids Dynamics. 1973.
5. BATHE, K. J.; WILSON, E. L.: «Numerical methods in finite element analysis». Prentice Hall. 1976.
6. BELLA, D. A.; DOBBINS, W. E.: «Difference modelling of stream pollution». Journal of the Sanitary Eng. Div. ASCE. Vol 94, N.º SA5. 1968.
7. BOND, R. D.; STRAUB, C. P.: «Handbook of environmental control wastewater: Treatment and disposal». Vol 4 CRC Press. 1974.
8. BRATANOW, T.; ECER, A.: «Suitability of the finite element method for analysis of unsteady flow around oscillating airfoils». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluids Dynamics. 1973.
9. BREBBIA, C. A.; ADEY, R.: «Circulation problems» Dept. of Civil Engineering. Univ. of Southampton. 1977.
10. CARDONA, J.; SAMARTIN, A.: «Interpolación de Birkhoff a partir de una formulación variacional asociada al método de los elementos finitos». VIII CED-YA. Santander, 1985.
11. CARDONA, J.; SAMARTIN, A.: «An algorithm for graphical computer results in shells». Practical aspects on the computational methods in shell and space structures. Univ. of Lovaina. Belgica 13, 14, 15 junio 1986.
12. CARDONA, J.; SAMARTIN, A.: «Aplicación del método de los elementos finitos a problemas de interpolación». Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 2, 2, págs. 165-194. 1986.
13. CARTER, L.; FERNANDEZ, R.: «A finite element-singular perturbation technique for convection diffusion problems». Dept. of Civil Engineering. Univ. Southern California 1980.
14. CASTILLEJO, F. F.; LAVIN, A.; ESTEBAN, A.: «Medidas de corrientes en la Bahía de Santander y zona adyacente por medio de flotadores». Estudio básico para el conocimiento de los niveles de contaminación e hidrodinámica de la Bahía de Santander. C.I.D. Vol. 1. 1979.
15. CUNGE, J. A.; HOLLY Jr., F. M.; SHWARZ, S.: «Mathematical modelling study of pollution transport in the Bay of Saint-Brieuc, France». SOGREAH. Ingenieurs Conseils.
16. DAILEY, J. E.: «A numerical model of transient water quality in a one-dimensional estuary based on the finite element method». Int. Conf. Num. Meth. in Fluid Dynamics. 1973.
17. EHLIG, C.: «Comparison of numerical methods for solution of the diffusion-convection equation in one and two dimensions». Finite Elements in Water Resources-Pentech Press. 1976.
18. ESPERT, V.; CABRERA, E.; MARTINEZ, F.: «Finite element algorithm for calculating wind distribution in three dimensional atmospheric boundary layer».

- yer». Cátedra de Mecánica de Fluidos. Univ. Polit. Valencia. 1985.
19. FISCHER, H. B.: «The mechanics of dispersion in natural streams». Journal of the Hydraulics Division. ASCE. Vol. 93, N.º HY6. 1967.
 20. FISCHER, H. B.: «Dispersion predictions in natural streams». Journal of the Sanitary Engineering Division. ASCE. Vol 94, SA5. 1968.
 21. VAN GENUCHTEN, M. T.: «On the accuracy and efficiency of several numerical schemes for solving the convective-dispersive equation». Finite Elements in Water Resources. Pentech. Press. 1976.
 22. GOMEZ, J.; DE CASTILLEJO, F. F.; GARCIA, J. M.: «Estudio oceanográfico de la Bahía de Santander para su posterior ordenación y desarrollo». Estudio básico para el conocimiento de los niveles de contaminación e hidrodinámica de la Bahía de Santander. CID. Vols. 2-6. 1981.
 23. HOLLEY, E. R.: «Unified view of diffusion and dispersion». Journal of the Hydraulics Division. ASCE. Vol 95, N.º HY2. 1969.
 24. KASHIYAMA, K.: «Interpolation method for preparation of input data of water depth in finite element analysis of shallow water flow». Eng. Comput. Vol. 2. Dic. 1985.
 25. LAGER, J. A.: «Effluent disposal in South San Francisco Bay». Journal of the Sanitary Engineering Division. ASCE. Vol 94, N.º SA2. 1968.
 26. LORENTZ, G. G.; JETTER, K.; RIEMENSCHNEIDER, D.: «Birkhoff interpolation». Addison-Wesley. 1983.
 27. MELLI, P.: «An application of the Galerkin method to the Eulerian-Lagrangian treatment of time dependent advection and diffusion of air pollutants». Finite Elements in Water Resources. 1976.
 28. MILES, G. V.; WEARE, T. J.: «On representation of friction in two-dimensional numerical models». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics. Univ. of Southampton. 1973.
 29. ORTIZ, M.: «Mecánica computacional». Curso monográfico. ETSICCP. Univ. de Santander. 1984.
 30. SAMARTIN, A. F.: «Cálculo de estructuras de puentes de hormigón». Rueda 1983.
 31. SAMARTIN, A. F.: «Desarrollo de familias jerárquicas de elementos finitos C^k ». VI CEDYA. Jaca (Huesca). 1983.
 32. SMITH, I. A.: «Integration in time of diffusion and diffusion convection equation». Finite Elements in Water Resources. Pentech Press (1977).
 33. SMITH, I. A.; SIEMIENIUCH, J. L.; GLADWELL, I.: «Evaluation of Norsett methods for integrating differential equations in time». Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 1977.
 34. SMITH, I. M.; FERRADAY, R. V.; O'CONNOR, B. A.: «Rayleigh-Ritz and Galerkin model». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics. 1973.
 35. SPAULDING, M. L.: «Laterally-integrated numerical water quality model». Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics. 1973.
 36. STOERL, J.; BULIRSCH, R.: «Introduction to Numerical Analysis». Springer Verlag. 1980.
 37. TANG, D. H.; PINDER, G. F.: «Simulation of ground-water flow and mass transport under uncertainty». Advances in Water Resources, Vol. 1. N.º 1. 1977.

Juan Cardona Pardo



Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Cantabria (1979). Becario de Formación de Personal Investigador por el Ministerio de Educación y Ciencia (1980-82). Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Cantabria (1987). Profesor Adjunto de la Escuela Superior de la Marina Civil de Santander.

Avelino Samartín Quiroga



Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1963). Catedrático y Director del Departamento de Análisis de la Estructuras de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos de Santander. Vocal de la Junta Directiva de la Asociación Española de Ingeniería Sísmica.